Wahlaufgaben

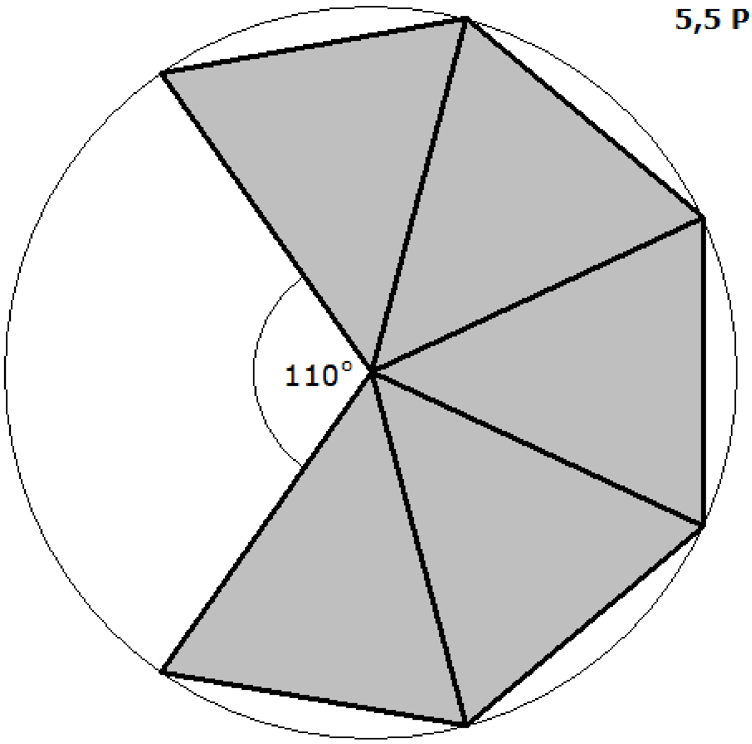
Aufgabe 2016 W2a:

5,5 P

Aus einer Kreisfläche wird die Mantelfläche einer regelmäßigen fünfseitigen Pyramide ausgeschnitten.

Der Kreis hat einen Radius von 8,3 cm.

Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.



Strategie 2016 W2a:

Gegeben:

regelmäßige fünfseitige Pyramide

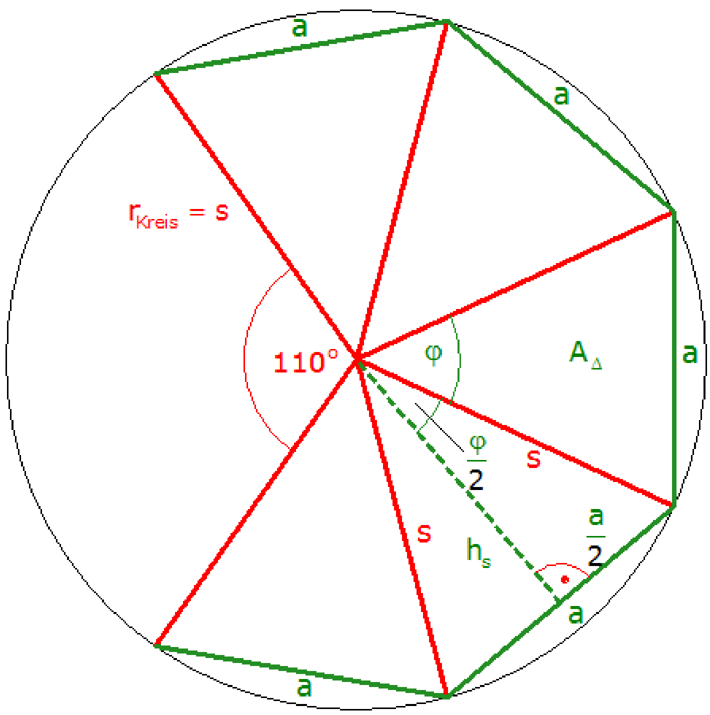
$r_{Kreis} = 8,3\,\text{cm}$

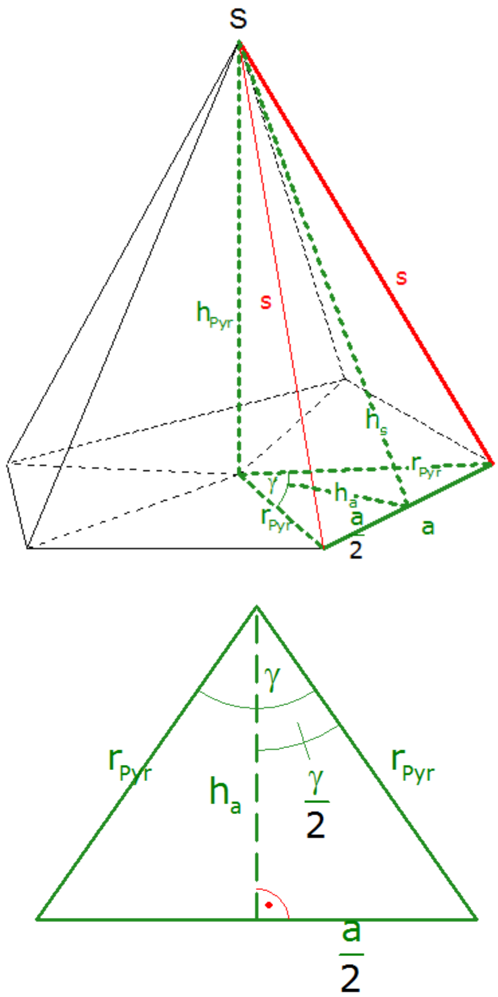
$s = 8,3\,\text{cm}$

Gesucht:

V_{Pyr}

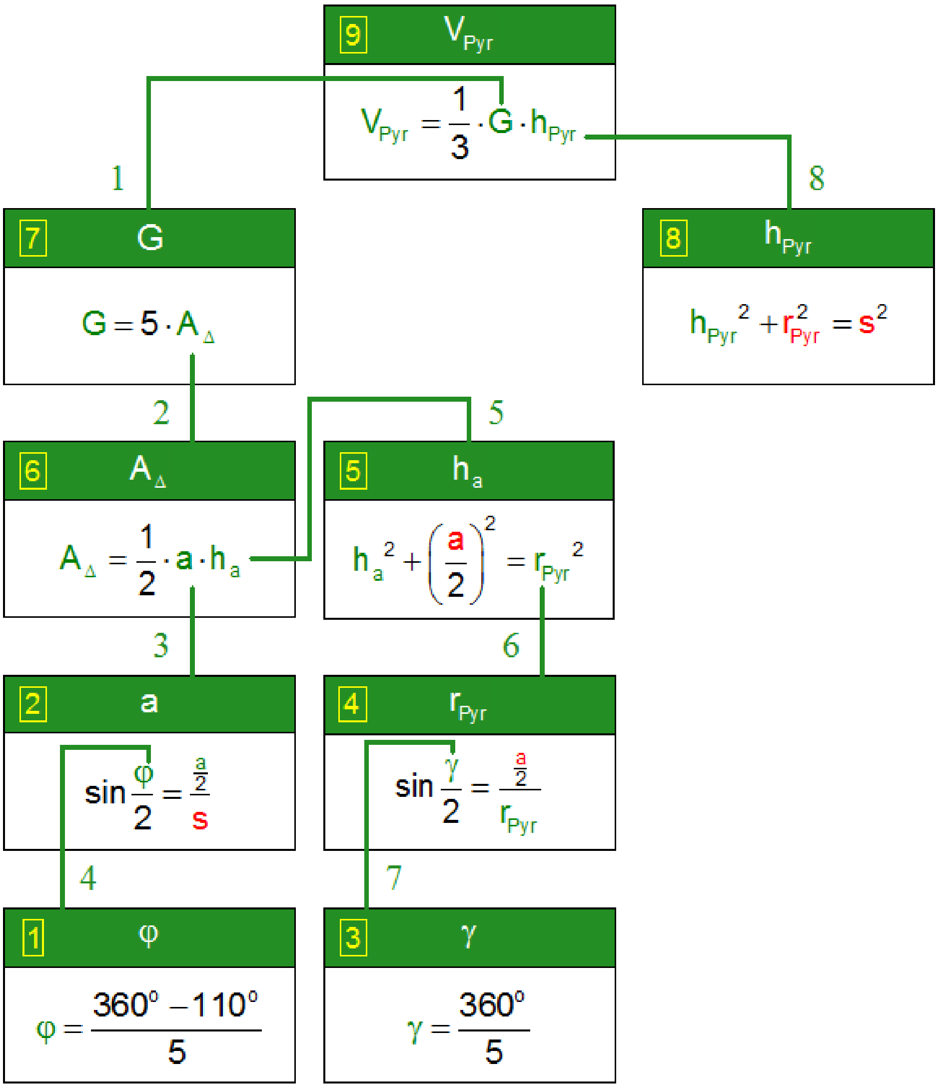
Skizze:





Strategie 2016 W2a:

<u>Struktogramm:</u>



Lösung 2016 W2a:

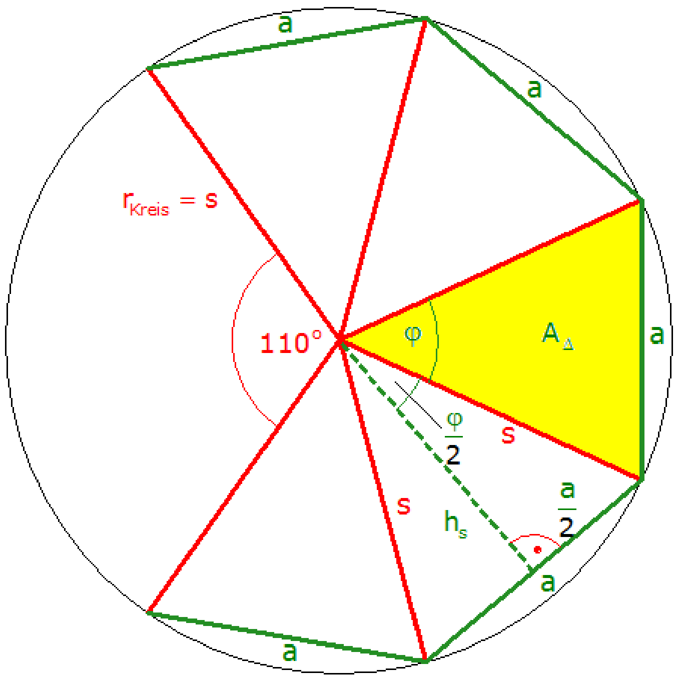
<u>1. Berechnung des Winkels φ:</u>

$$\varphi = \frac{360° - 110°}{5}$$ siehe gelbes Dreieck

$$\varphi = \frac{360° - 110°}{5}$$

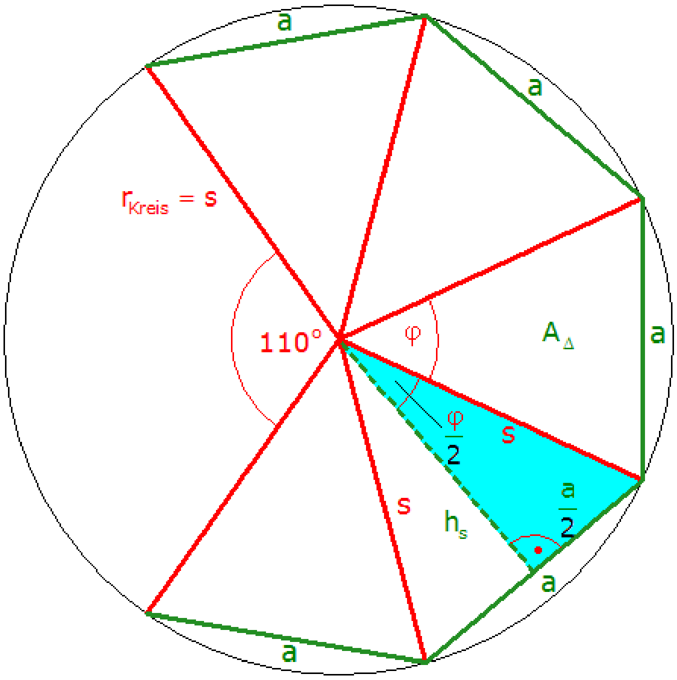
$$\varphi = \frac{250°}{5}$$

$$\underline{\varphi = 50°}$$



Lösung 2016 W2a:

2. Berechnung der Pyramiden-Grundseite a:



$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\frac{a}{2}}{s}$$ Sinusfunktion im rechtwinkligen hellblauen Teildreieck

$$\sin\frac{50^\circ}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{8{,}3}$$

$$\sin 25^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{8{,}3}$$

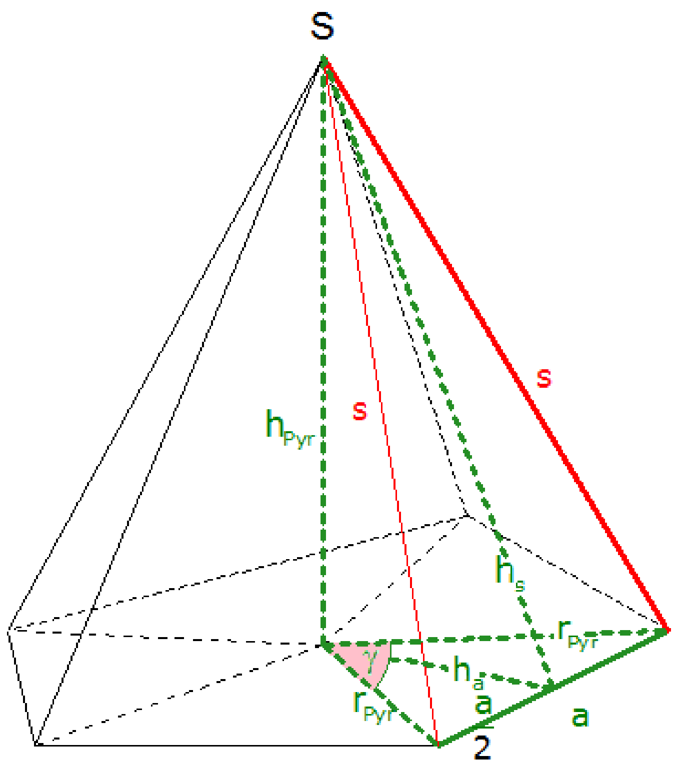
$$0{,}4226 = \frac{\frac{a}{2}}{8{,}3}$$ Seiten tauschen

$$\frac{\frac{a}{2}}{8{,}3} = 0{,}4226 \quad |\cdot 8{,}3$$

$$\frac{a}{2} = 3{,}50758 \quad |\cdot 2$$

$$\underline{a = 7{,}02\,\text{cm}}$$

3. Berechnung des Winkels γ:



$$\gamma = \frac{360^\circ}{5}$$

$$\gamma = \frac{360^\circ}{5}$$

$$\underline{\gamma = 72^\circ}$$

Lösung 2016 W2a:

4. Berechnung des Pyramiden-Grundflächen-Radius r_{Pyr}:

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{\frac{a}{2}}{r_{Pyr}}$$ Sinusfunktion im rechtwinkligen goldfarbenen Teildreieck

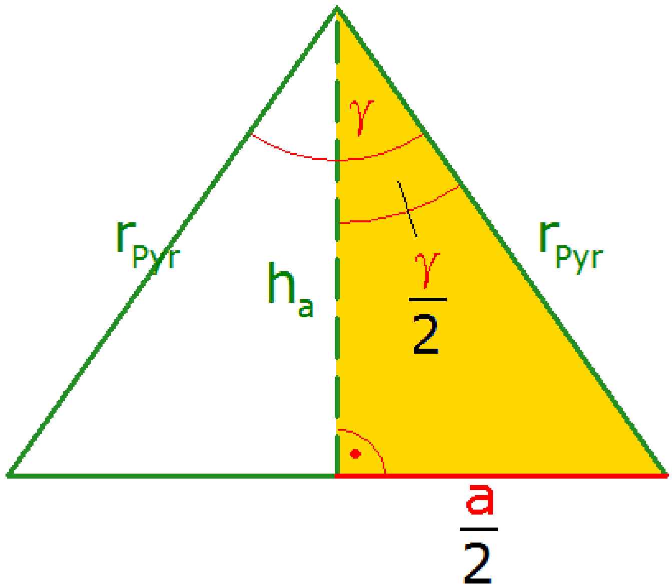
$$\sin\frac{72^\circ}{2} = \frac{\frac{7{,}02}{2}}{r_{Pyr}}$$

$$\sin 36^\circ = \frac{3{,}51}{r_{Pyr}}$$

$$0{,}5878 = \frac{3{,}51}{r_{Pyr}} \quad \Big| \cdot r_{Pyr}$$

$$r_{Pyr} \cdot 0{,}5878 = 3{,}51 \quad \Big| : 0{,}5878$$

$$\underline{r_{Pyr} = 5{,}97\,\text{cm}}$$



5. Berechnung der Dreieckshöhe h_a:

$$h_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = r_{Pyr}^2$$ Pythagoras im rechtwinkligen goldfarbenen Teildreieck

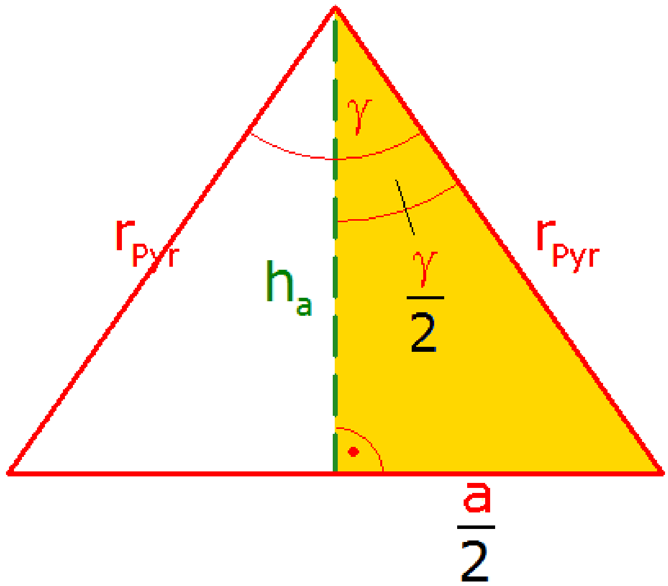
$$h_a^2 + \left(\frac{7{,}02}{2}\right)^2 = 5{,}97^2$$

$$h_a^2 + 3{,}51^2 = 5{,}97^2$$

$$h_a^2 + 12{,}3201 = 35{,}6409 \quad \Big| -12{,}3201$$

$$h_a^2 = 23{,}3208 \quad \Big| \sqrt{}$$

$$\underline{h_a = 4{,}83\,\text{cm}}$$

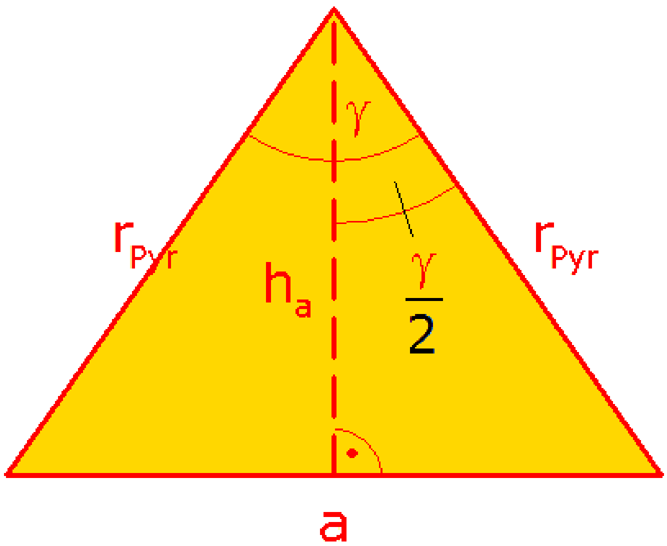


6. Berechnung der Dreiecksfläche A_Δ:

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$ Formel Dreiecksfläche

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 7{,}02 \cdot 4{,}83$$

$$\underline{A_\Delta = 16{,}95\,\text{cm}^2}$$



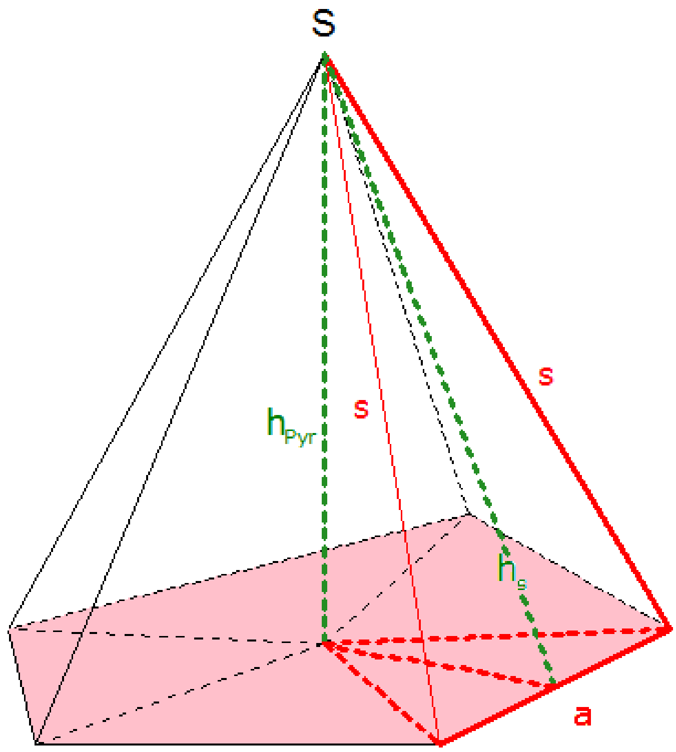
Lösung 2016 W2a:

7. Berechnung der Pyramiden-Grundfläche G:

$G = 5 \cdot A_{\Delta}$

$G = 5 \cdot 16,95$

$\underline{G = 84,75\,cm^2}$



8. Berechnung der Pyramidenhöhe h_{Pyr}:

Pythagoras im rechtwinkligen hellgrauen Teildreieck

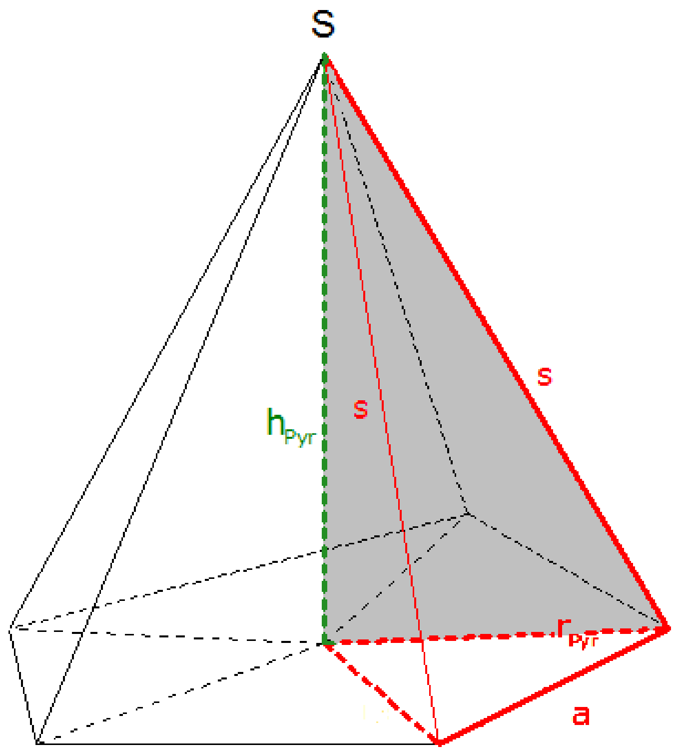
$h_{Pyr}^2 + r_{Pyr}^2 = s^2$

$h_{Pyr}^2 + 5,97^2 = 8,3^2$

$h_{Pyr}^2 + 35,6409 = 68,89 \quad | -35,6409$

$h_{Pyr}^2 = 33,2491 \quad | \sqrt{\ }$

$\underline{h_{Pyr} = 5,77\,cm}$



Lösung 2016 W2a:

9. Berechnung des Pyramidenvolumens V_{Pyr}:

$$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_{Pyr}$$ Formel Pyramidenvolumen

$$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot 84{,}75 \cdot 5{,}77$$

$$\underline{\underline{V_{Pyr} = 163\,cm^3}}$$