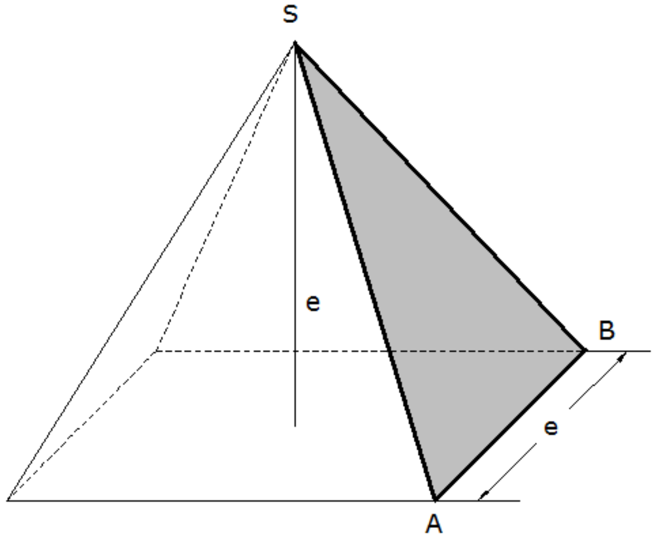
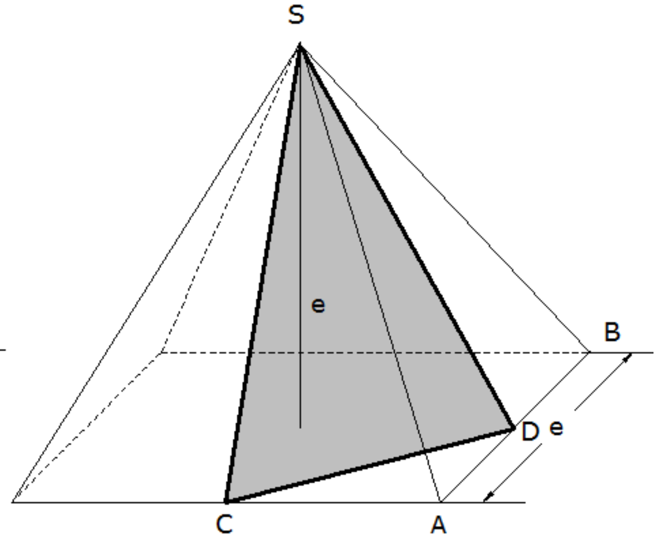
Wahlaufgaben

Aufgabe 2016 W2b:

Eine quadratische Pyramide ist zweimal abgebildet. In der linken Abbildung ist das Dreieck ABS markiert und in der rechten das Dreieck CDS.
Die Punkte C und D halbieren jeweils die Grundkante.

4,5 P





Welche der folgenden Formeln gehört zur Dreiecksfläche ABS und welche zur Dreiecksfläche CDS? Begründen Sie Ihre Entscheidung ohne Verwendung gerundeter Werte.

(1) $A = \frac{3\,e^2}{8}$ (2) $A = \frac{e^2}{4}\sqrt{6}$ (3) $A = \frac{e^2}{4}\sqrt{5}$

Strategie 2016 W2b:

Gegeben:

quadratische Pyramide

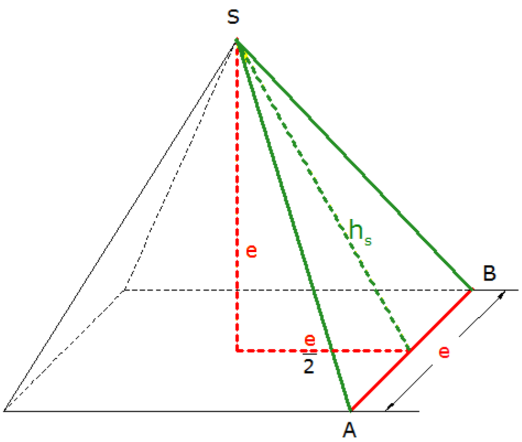
$a = e$

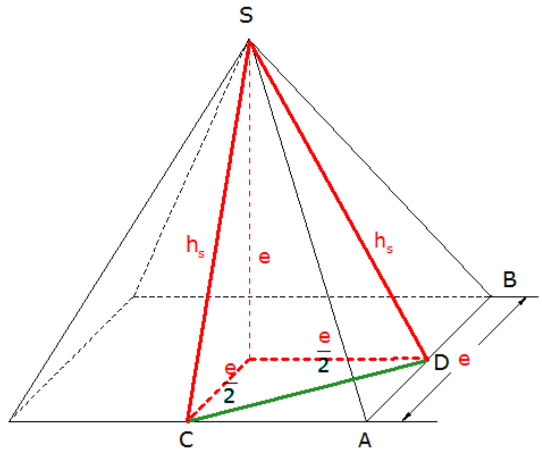
$h_{Pyr} = e$

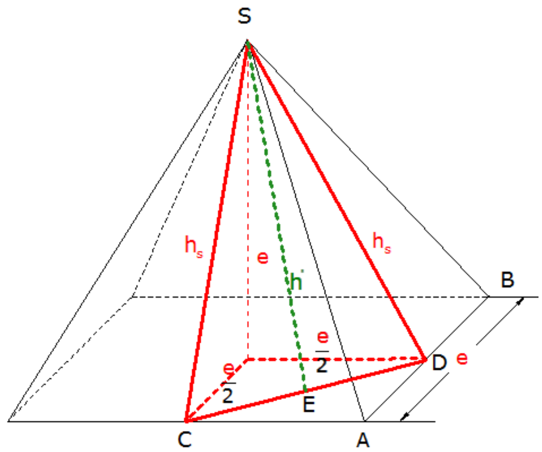
Gesucht:

Formel

Skizze:







Strategie 2016 W2b:

Struktogramm:

2 A_{ABS}	5 A_{CDS}	
$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot h_s \cdot e$	$A_{CDS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot h'$	
1	2	3
1 h_s	3 $\overline{CD}$	4 h'
$h_s^2 = e^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2$	$\overline{CD}^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2$	$h'^2 + \left(\frac{\overline{CD}}{2}\right)^2 = h_s^2$

Lösung 2016 W2b:

1. Berechnung der Höhe der Seitenfläche h_s:

$$h_s^2 = e^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2$$ Pythagoras im rechtwinkligen gelben Teildreieck

$$h_s^2 = e^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2$$

$$h_s^2 = e^2 + \frac{e^2}{4}$$

$$h_s^2 = \frac{4 \cdot e^2}{4} + \frac{e^2}{4}$$ erweitern

$$h_s^2 = \frac{4e^2}{4} + \frac{e^2}{4}$$ gleichnamige Brüche addieren

$$h_s^2 = \frac{5e^2}{4} \quad \left| \sqrt{} \right.$$

$$h_s = \sqrt{\frac{5e^2}{4}} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

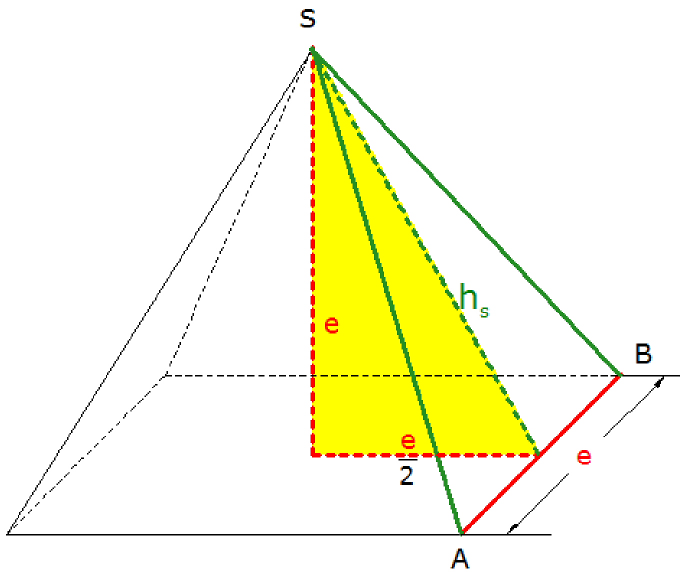
$$h_s = \frac{\sqrt{5e^2}}{\sqrt{4}} \qquad \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$h_s = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{e^2}}{\sqrt{4}}$$

$$h_s = \frac{\sqrt{5} \cdot e}{2}$$

$$h_s = \frac{e \cdot \sqrt{5}}{2}$$

$$\underline{h_s = \frac{e}{2}\sqrt{5}}$$



Lösung 2016 W2b:

2. Berechnung der Dreiecksfläche ABS:

$$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot h_s \cdot e$$ Formel Dreiecksfläche

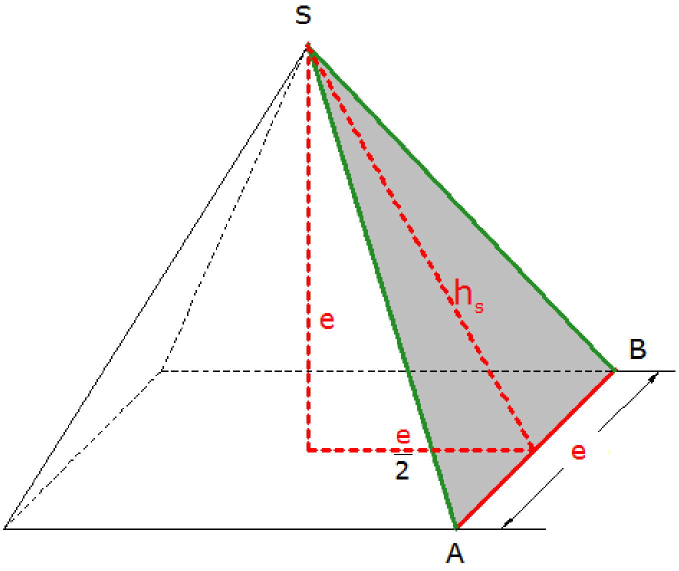
$$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{2}\sqrt{5} \cdot e$$

$$A_{ABS} = \frac{e}{4}\sqrt{5} \cdot e$$

$$A_{ABS} = e \cdot e \frac{1}{4}\sqrt{5}$$

$$A_{ABS} = e^2 \frac{1}{4}\sqrt{5}$$

$$\underline{\underline{A_{ABS} = \frac{e^2}{4}\sqrt{5}}}$$



Antwort: Zur Dreiecksfläche ABS gehört Formel (3)

3. Berechnung der Strecke $\overline{CD}$:

$$\overline{CD}^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2$$ Pythagoras im rechtwinkligen hellblauen Teildreieck

Teildreieck

$$\overline{CD}^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{e}{2}\right)^2$$

$$\overline{CD}^2 = \frac{e^2}{4} + \frac{e^2}{4}$$ gleichnamige Brüche addieren

$$\overline{CD}^2 = \frac{2e^2}{4}$$ kürzen

$$\overline{CD}^2 = \frac{e^2}{2} \quad \Big|\sqrt{\ }$$

$$\overline{CD} = \sqrt{\frac{e^2}{2}}$$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

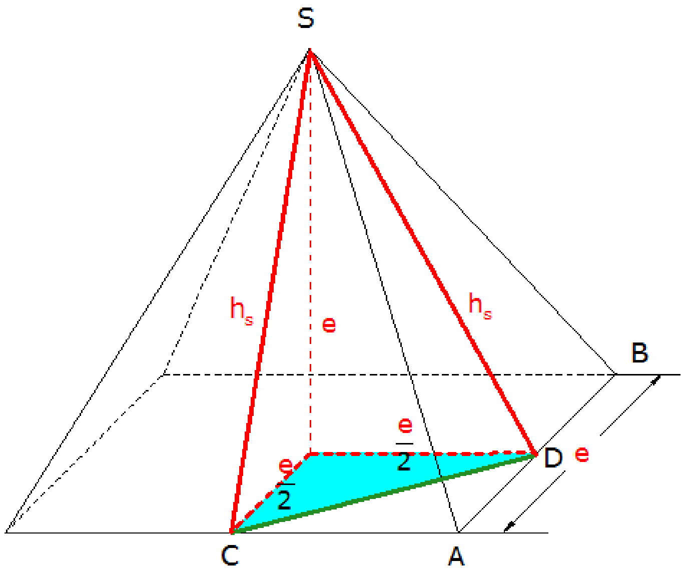
$$\overline{CD} = \frac{\sqrt{e^2}}{\sqrt{2}}$$

$$\overline{CD} = \frac{e}{\sqrt{2}}$$

$$\overline{CD} = \frac{e}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$ Nenner rational machen

$$\overline{CD} = \frac{e\sqrt{2}}{2}$$

$$\underline{\overline{CD} = \frac{1}{2}e\sqrt{2}}$$



Lösung 2016 W2b:

4. Berechnung der Höhe der Seitenfläche CDS h':

$$h'^2 + \left(\frac{\overline{CD}}{2}\right)^2 = h_s^2$$ Pythagoras im rechtwinkligen hellgrauen Teildreieck DES

$$h'^2 + \left(\frac{\frac{1}{2}e\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{5e^2}{4}$$

$$h'^2 + \left(\frac{1}{4}e\sqrt{2}\right)^2 = \frac{5e^2}{4}$$

$$h'^2 + \frac{1}{16}\cdot e^2 \cdot 2 = \frac{5e^2}{4}$$ Brüche kürzen bzw. erweitern erweitern

$$h'^2 + \frac{1}{8}\cdot e^2 = \frac{10e^2}{8} \quad \left|-\frac{1}{8}\cdot e^2\right.$$

$$h'^2 = \frac{9e^2}{8} \quad \left|\sqrt{}\right.$$

$$h' = \sqrt{\frac{9e^2}{8}}$$ $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$$h' = \frac{\sqrt{9e^2}}{\sqrt{8}}$$

$$h' = \frac{\sqrt{9e^2}}{\sqrt{2\cdot 4}}$$ $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$

$$h' = \frac{\sqrt{9}\sqrt{e^2}}{\sqrt{2}\sqrt{4}}$$

$$h' = \frac{3e}{\sqrt{2}\cdot 2}$$

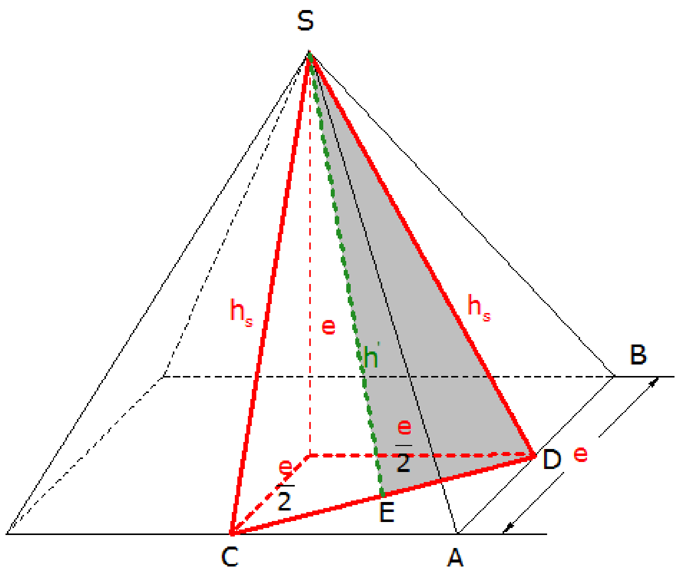
$$h' = \frac{3e}{2\cdot\sqrt{2}}$$

$$h' = \frac{3e}{2\cdot\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$ Nenner rational machen

$$h' = \frac{3e\sqrt{2}}{2\cdot 2}$$

$$h' = \frac{3e\sqrt{2}}{4}$$

$$\underline{h' = \frac{3}{4}e\sqrt{2}}$$



Lösung 2016 W2b:

5. Berechnung der Dreiecksfläche CDS:

$$A_{CDS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot h'$$ Formel Dreiecksfläche

$$A_{CDS} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot e \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot e \cdot \sqrt{2}$$

$$A_{CDS} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot e \cdot e \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$A_{CDS} = \frac{3}{16} \cdot e^2 \cdot 2$$

$$A_{CDS} = \frac{3}{8} \cdot e^2$$

$$\underline{\underline{A_{CDS} = \frac{3e^2}{8}}}$$

Antwort: Zur Dreiecksfläche CDS gehört Formel (1)